Derivabilidad formal: la noción de prueba

En [16], cap. 2.3 se introducía por vez primera la noción de *derivabilidad formal*. Quedó claro entonces que el interés de esta noción era definir la relación de consecuencia $R^{|}$ mediante procedimientos totalmente distintos a aquellos que se empleaban en el caso de la consecuencia semántica. Llegué a sugerir, incluso, la posibilidad de ver en estas nociones alternativas, derivabilidad formal y consecuencia semántica, la realización, por lo que a la Lógica respecta, de dos capacidades cognitivas que muy bien podríamos considerar como primitivas en el equipamiento cognitivo del ser humano. Mientras que la consecuencia semántica se propone establecer un *criterio* que deba ser idealmente satisfecho por cada argumento lógicamente correcto, la derivabilidad formal intenta *construir* mediante una serie de manipulaciones efectivas la conclusión de cada argumento a partir de sus premisas. Lo que parece enfrentado es la bondad de un criterio con la existencia de una construcción. Es cierto que en el caso de $\surd_E$ la evaluación del criterio asociado a la consecuencia semántica da lugar a una serie de construcciones –tablas de verdad- que permiten resolver el problema de si un argumento con un número finito de premisas es o no válido. Pero se trata, incluso entonces, de un componente añadido que no figura en la propia definición de consecuencia semántica: es esta siempre se menciona un conjunto, el de las interpretaciones admisibles I_v, cuyos miembros deben ser idealmente examinados uno a uno antes de determinar si A es o no consecuencia semántica de X.

Como sucedía en el caso de la consecuencia semántica, lo que corresponde ahora es la descripción detallada de la definición ofrecida en [16]. Se trata de entender cómo obtenemos realmente conclusiones a partir de premisas mediante construcciones tangibles, finitas, al alcance de nuestras capacidades. Lo que pretendemos es, en definitiva, caracterizar esos actos mentales que solemos denominar de forma un tanto vaga como *derivaciones*. De ahí el nombre de *derivabilidad formal*.

Pero, ¿qué clase de construcciones son éstas? En primer lugar, son construcciones que tienen como parte principal de su objeto fórmulas. Convendrá también que admitamos la presencia de otros símbolos auxiliares o de símbolos que hagan referencia a la propia deducción. La consideración de estos símbolos es la que aconsejaba hablar de ciertas entidades asociadas a fórmulas en lugar de hablas directamente de fórmulas. El punto, como se irá viendo, no carece por completo de importancia. ¿De qué está hecha una construcción simbólica de este tipo, en qué pasos se divide? La información aportada por las premisas puede ordenarse formando una cadena constituida por entidades finitas estando cada una de ellas asociada de forma inmediata a una fórmula. Derivar es construir una cadena que, empezando por una cadena inicial, llegue a otra mayor cuyo último paso o componente se halle asociado de alguna forma a la conclusión. Para llevar a cabo esta construcción hay que recurrir a una herramienta sumamente básica, hay que servirse de lo que se suele denominar *regla de inferencia*.

[1] Por una *regla de inferencia* nos referiremos a cualquier instrucción del tipo

$$\frac{(\ldots\phi_1\ldots),\ (\ldots\phi_2\ldots)\ldots\ (\ldots\phi_n\ldots)}{(\ldots\beta\ldots)}$$

en la que ϕ_i, β son fórmulas y $(\ldots\phi_i\ldots)$, $(\ldots\beta\ldots)$ son entidades en las que junto a ϕ_i, β pueden estar presentes ciertos símbolos auxiliares relevantes previamente introducidos, otras fórmulas, o incluso secuencias y conjuntos de fórmulas.

Una *inferencia inmediata* es, simplemente, el resultado de aplicar una regla de inferencia. La instrucción que una de estas reglas expresa debe entenderse del siguiente modo: si en una colección de expresiones del tipo (...χ...) aparecen las que se indica en la cabecera de la regla –si no se indica otra cosa, éstas pueden aparecer distribuidas y en cualquier orden- entonces debe añadirse al final de esa colección la entidad (...β...) que figura en la base de la regla. Decimos, pues, que una fórmula –o expresión- es consecuencia inmediata de una serie de fórmulas –o entidades apropiadas- syss existe una regla de inferencia que permite añadir la fórmula –o entidad- en cuestión a la serie inicialmente dada. En lo que sigue, me referiré a entidades del tipo (...χ...) aceptando que en caso de no añadirse recurso auxiliar alguno una entidad (...χ...) no es sino la propia fórmula χ.

Una *derivación*, también suele hablarse de *deducción*, no es sino un proceso finito por el cual se extiende una colección de entidades asociadas a fórmulas mediante aplicación de reglas de inferencia. Una definición absolutamente precisa pasa, no obstante, por una noción previa absolutamente fundamental en lo que sigue.

[2] Por un *sistema deductivo* se va a entender a partir de ahora cualquier par del tipo <A, R> en el que:

> A es un conjunto no necesariamente finito de entidades del tipo (...χ...) que reciben el nombre de *axiomas* y que puede ser eventualmente vacío y R es una colección finita de reglas de inferencia definidas sobre ese tipo de entidades.

Una vez conocido un sistema deductivo S, definir una derivación en dicho sistema es tarea fácil,

[3] Dado un sistema deductivo S, y un conjunto de fórmulas X, decimos que una fórmula A es *derivable en S* a partir de X, $X \vdash_S A$, en símbolos, syss, *existe* una secuencia finita de entidades del tipo (...χ...) tal que cada una de ellas es:

i. un axioma de S, o
ii. una entidad $(...x_i...)$ donde $x_i \in X$, o
iii. ha sido obtenida mediante la aplicación de reglas de S sobre fórmulas previamente introducidas en la secuencia,

y tal que

la última cadena de dicha secuencia es (...A...).

También podríamos haber definido directamente la noción de *derivación en S* como la secuencia de la que hacemos uso en [3] para decir a continuación que una fórmula es derivable a partir de una colección de ellas si existe una derivación tal que...No hay diferencia. Sí es importante que entendamos bien que mientras que toda derivación es una construcción finita por definición, la existencia de una de estas construcciones para una fórmula dada no tiene por qué poderse determinar de forma completamente constructiva. Debemos ser conscientes de que el uso del término "existe" sobre una colección de construcciones puede llevarnos a un tipo de búsqueda que no sea ella misma una construcción.

La composición de un sistema deductivo es uno de los criterios que vamos a emplear para presentar los distintos tipos de sistemas con que cabe analizar la derivabilidad. La primera diferencia importante es la que se refiere a la presencia o ausencia de un conjunto de axiomas. Los sistemas deductivos en los que el conjunto de axiomas no es vacío reciben el nombre genérico de *sistemas tipo Hilbert*, aunque es frecuente también referirse a ellos simplemente como *sistemas axiomáticos*. Los sistemas deductivos en los que el conjunto de axiomas es el conjunto vacío reciben el nombre de *sistemas tipo Gentzen*. No hay un único representante de esta clase de sistemas, sino al menos tres que gozan de cierto predicamento en la literatura científica. Se trata del *cálculo de deducción natural*, el *cálculo de tablas analíticas* y, finalmente, el *cálculo de secuentes*. Resumiendo, entonces, se tiene:

[4] *Sistemas deductivos*:

i. Sistemas tipo Hilbert (tienen axiomas):
Sistemas axiomáticos.

ii. Sistemas tipo Gentzen (no tienen axiomas)
Cálculo de Deducción natural.
Cálculo de Tablas analíticas.
Cálculo de Secuentes.

Un nombre también habitual para este tipo de sistemas es el de *cálculo*. La razón es obvia. Una diferencia tangible entre las definiciones más habituales de la relación de derivabilidad formal y la que he ofrecido aquí es la insistencia en marcar una cierta distancia entre la noción de fórmula y el tipo de entidad con que se opera en un cálculo. Es cierto que hay ocasiones en las que esa distancia es muy poca, pero aún entonces me parece incorrecto pensar que en los cálculos se actúa directamente sobre el lenguaje definiendo sin intermediación alguna una relación de consecuencia. Hay sistemas deductivos en los que el interfaz que media entre las operaciones que se realizan en ese cálculo y la consecuencia lógica son notables llegando a adquirir alguna importancia metateórica. Sin llegar a tanto, hay multitud de situaciones en el dominio de la matemática en la que las instrucciones de un algoritmo deben ser finalmente reinterpretadas para determinar el resultado buscado. Muchos de los procedimientos de cálculo elementales que se estilan en la aritmética son así.

Un concepto que conviene aclarar antes de proceder a la exposición de los distintos sistemas es el de *metalenguaje*. He evitado deliberadamente pronunciarme sobre esta noción fundamental para no exagerar su importancia en dominios en los que su aplicación era trivial. Dado un cierto lenguaje L, formal o no, decimos que L’ es el *metalenguaje* de L cuando L’ contiene suficientes recursos expresivos como para hablar acerca de las expresiones de L y de sus propiedades. La forma que hemos venido empleando hasta ahora de referirnos a las expresiones de un lenguaje forma es mediante el uso de letras expresamente no incluidas en el vocabulario básico de aquellos lenguajes. Así, por ejemplo, siempre que ha habido que decir algo de todas las fórmulas cuya conectiva principal es "$\rightarrow$", se ha recurrido a cláusulas del tipo "para toda fórmula del tipo $A \rightarrow B$...", donde A y B no pertenecen a vocabulario básico considerado. La expresión $A \rightarrow B$ no es una fórmula de L_E, sino que, en realidad, agrupa una cantidad infinita de ellas: todas las que resultan al reemplazar A y B por fórmulas genuinas. A estas expresiones tan peculiares se les denomina *esquemas de fórmula*. Como ya he dicho, no quiero exagerar la importancia de estos conceptos más allá de lo que supone servirse de recursos extra para referirse de forma genérica a una categoría lógico-gramatical que ya hemos reconocido expresamente en el lenguaje. Aquel lenguaje del que habla un metalenguaje L' recibe el nombre de *lenguaje objeto*. En lo que sigue, resulta relevante hacer notar la presencia de esquemas de fórmulas en lugar de simples fórmulas del lenguaje objeto. Ello tiene algún efecto sobre la presentación de los sistemas deductivos presentes al punto de malograr algunos de sus rasgos sino se tiene en cuenta este distingo.

A continuación voy a ofrecer una descripción más o menos exhaustiva de cada uno de los cálculos enumerados en [4]. No pretendo que esto sea suficiente como para saber utilizar adecuadamente cada uno de ellos, tarea a la que dedicaré un capítulo independiente.

I. Sistemas axiomáticos. Originalmente los sistemas axiomáticos están pensados para derivar *teoremas* a partir de una colección dada de axiomas. Un teorema es, precisamente, una fórmula derivable tan sólo a partir de los axiomas y/o reglas de un sistema deductivo. Los teoremas son, por tanto, fórmulas para las que existen demostraciones *intrasistemáticas*, es decir, cuya prueba no precisa de la información incorporada en las premisas. Esto hace que la demostración de un teorema en un sistema deductivo cualquiera –no necesariamente un sistema axiomático- se represente mediante $|_S A$, dando así a entender que el conjunto X de premisas es el conjunto vacío –$X=\iota$- y que los únicos recursos admisibles son los incorporados en S.

Derivabilidad formal

Aunque aquí estemos considerando la *demostrabilidad* -$|_S$ A- como un caso límite de la noción de derivabilidad -X$|_S$ A, cuando X es el conjunto vacío- también es posible proceder de manera inversa: considerando la derivabilidad como demostrabilidad a partir de supuestos. Bajo estas decisiones se ocultan complejas preferencias relativas a prioridades de tipo lógico y epistemológico: ¿qué es más elemental y básico, la noción de teorema, o la de argumento correcto? ¿Qué es antes en el orden de las cosas, la teorematicidad de una fórmula o la aceptabilidad de una inferencia?

Sea como fuere, es cierto que los sistemas axiomáticos son originalmente concebidos para el estudio de la demostrabilidad –teorematicidad- de las expresiones de un sistema. Esto hace que sus reglas de inferencia tengan una peculiar característica: su formato hace referencia a teoremas y no a simples fórmulas, razón por la cual suelen recibir el nombre de *reglas de prueba*. Todo esto sólo se entenderá adecuadamente observando un sistema axiomático que caracterice la demostrabilidad en L_E.

[5] Sistema axiomático para L_E (Ax)

Ax.1 $|A\to(B\to A)$

Ax.2 $|(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$

Ax.3 $|(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$

R1) $$\frac{|A \qquad |A\to B}{|B}$$

Como puede verse, este sistema está formado por expresiones esquemáticas que reciben el nombre de esquemas de axioma. La única regla que es preciso considerar es R1 y me referiré a ella como regla de *modus ponens* (MP). Obsérvese que, tal y como aquí aparecen descritas, estas reglas son reglas de prueba: sólo se aplican a teoremas de este sistema.

[6] *Demostrable en Ax*. Una fórmula A de L_E es demostrable en Ax., $|_{Ax} A$, syss existe una derivación de A a partir de Ax.1-Ax.3 y R1.

Resulta llamativa la ausencia de ciertas constantes lógicas en las fórmulas escogidas como axiomas. No están presentes ni el conjuntor ni el disyuntor los cuales se reintroducen a través de oportunas definiciones. Dicho de otra forma, antes de proceder a demostrar una determinada fórmula de L_E es preciso recurrir a un proceso de traducción mediante el que se eliminan las conectivas no presentes en Ax dando lugar a una fórmula equivalente a la original. Las reglas de traducción que es preciso considerar son:

[7] r1) $\dfrac{A\&B}{\neg(A\rightarrow\neg B)}$ r2 $\dfrac{AvB}{\neg A\rightarrow B}$

La razón para proceder de este modo se conecta en parte con el espíritu de este tipo de cálculos. Un sistema axiomático responde, al menos en parte, a un ideal sintético muy característico. Estos sistemas pretenden reducir toda la variedad de fórmulas demostrables en Ax. a una colección, los axiomas, dotados en aparentemente, de una cierta excelencia. Cuantos menos principios de este tipo se consideren tanto mejor. Esta razón, válida desde luego en la caracterización de teorías con significado extralógico –en el dominio de la Matemática o la Física- queda un tanto desvirtuada en el caso de la Lógica pura. La auténtica justificación vigente para optar por una colección de axiomas tan limitada es de otro orden. Los sistemas axiomáticos suelen demostrar su valía cuando se trata de establecer resultados generales acerca de la potencia de un sistema o de las características generales de la demostrabilidad.

Derivabilidad formal

Cuantos menos principios distintos sea preciso tener en cuenta a la hora de analizar alguna hipótesis a ese respecto, más fácil resultará establecerla o refutarla.

La razón por la cual no podemos tomar muy en serio la excelencia de los axiomas –esquemas de axioma- enumerados en [5] es la existencia de una cantidad ilimitada de sistemas axiomáticos alternativos. Esto viene dado, además, por la propia esencia del problema. Uno que peca de todo lo contrario al que acabamos de ofrecer es el siguiente –popularizado por S. Kleene en *Introducción a la Metamatemática*:

[8] Sistema axiomático para L_E Ax':

Ax.1 $| A\rightarrow(B\rightarrow A)$

Ax.2 $| (A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))$

Ax.3 $|A\rightarrow(B\rightarrow A\&B)$

Ax.4 $|A\&B\rightarrow A$

Ax.5 $|A\&B\rightarrow B$

Ax.6 $|A\rightarrow AvB$

Ax.7 $|B\rightarrow AvB$

Ax.8 $|(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow(AvB\rightarrow C))$

Ax.9 $|(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$

Ax. 10 $|\neg\neg A\rightarrow A$.

R1. Modus Ponens

La noción de *demostrabllidad en Ax'* se define de manera idéntica a la que se ha ofrecido en [6]. Aunque no lo demostremos, las relaciones de derivabilidad que resultan en uno y otro caso son iguales en el sentido de que toda fórmula demostrable en Ax. lo es en Ax' y viceversa.

La intención que subyace a tan larga lista de postulados es la de ofrecer en forma de axiomas los principios característicos propios de cada conectiva, junto con otros que establecen la relación entre ellas. Ax.1 y Ax.2 caracterizan el condicional, Ax.4 y Ax.5 caracterizan la conjunción, Ax.6 y Ax.7 hacen lo propio con la disyunción, mientras que Ax.10 se ocupa de la negación. Los restantes relacionan estas conectivas entre sí de una forma que no es fácil de entender si no es con el uso de estos procedimientos. La idea explorada por Kleene aquí al intentar describir las leyes específicas que controlan cada conectiva falla desde el principio debido al doble papel que desempeña el condicional material: como conectiva y como operador de descarga ligado a la regla de Modus Ponens.

Los problemas que suscitan estos sistemas, aparte de su manejo, son diversos. Pese a la existencia de un número ilimitado de sistemas axiomáticos alternativos capaces de caracterizar la misma relación de consecuencia –derivabilidad formal- no toda elección de axiomas resulta adecuada. Hay elecciones que pueden carecer de capacidad como para demostrar ciertas expresiones aceptables, mientras que es fácil hallar otros que prueban demasiadas cosas, de hecho, una fórmula y su negación. Es posible igualmente que un sistema axiomático resulte redundante al incluir entre sus alguno que resulta ser demostrable a partir de los restantes. Este problema, denominado en ocasiones problema de la *independencia*, tiene una larga historia en el dominio de la geometría: la demostración de la independencia del Postulado de las Paralelas de Euclides es lo que da lugar a la aparición de las geometrías no clásicas a finales del sigo xix.

En lo que sigue me voy a ocupar de los sistemas deductivos tipo Gentzen. La noción central vuelve a ser, por tanto, la de derivabilidad y no de la teorematicidad. ¿Cómo se puede sistematizar la obtención de conclusiones a partir de manipulaciones sobre los símbolos de las fórmulas presentes en las premisas? ¿Cuántas y qué tipo de reglas son necesarias para derivar todas las conclusiones legítimamente obtenibles a partir de un conjunto de premisas dado? Cada uno de los sistemas que se van a discutir a continuación puede ser entendido como un tipo de respuesta a las preguntas anteriores. De hecho, constituyen estrategias en las que es posible ver realizados estilos muy distintos de entender el acto de manipular símbolos de acuerdo a ciertas reglas y objetivos. En última instancia, resulta difícil saber si esta enumeración de procedimientos puede ser engrosada con nuevas variantes no triviales o estamos, en cierto modo, ante una colección capaz de decirnos algo sobre la variedad de estrategias cognitivas mediante las que ejecutamos manipulaciones simbólicas dotadas de contenido lógico.

II. Cálculo de Deducción natural. Este mecanismo deductivo está basado en la idea de que toda fórmula que pueda ser obtenida como conclusión a partir de una colección de premisas será el resultado de un proceso de manipulación controlado tan sólo por dos tipos de operaciones: análisis y síntesis. Empleo estas expresiones en un sentido casi etimológico, ya que mi intención es aludir al doble mecanismo por el cual se rompen primero las conexiones de una fórmula para componer –sintetizar- luego, con las partes resultantes de esta y otras operaciones del mismo tipo, la propia conclusión buscada. Romper la estructura de una fórmula para obtener partes presentes en la misma, o ligadas de algún modo a la información contenida en aquella, tiene que tomar necesariamente la forma de un proceso de *eliminación de constantes lógicas*, ya que son éstas las que ligan las subfórmulas con las que se construye una expresión. El proceso de síntesis consistirá, entonces, en la descripción de herramientas que controlen y permitan la *introducción de constantes lógicas.* Esto hace que la presentación de un cálculo de deducción natural adopte un formato extraordinariamente simple: cada constante lógica quedará asociada a dos reglas, una que establece cómo ha de ser introducida para dar lugar a fórmulas de mayor complejidad y otra que indica cómo puede eliminarse en una fórmula dando lugar a otras ligadas la fórmula original.

[9] Cálculo de Deducción natural. (DN)

(I→)
$$\begin{array}{l} A \\ \ldots \\ B \\ \hline A\rightarrow B \end{array}$$

(E→)
$$\begin{array}{l} A\rightarrow B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

(I&)
$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline A\&B \end{array}$$

(E&)
$$\begin{array}{l} A\&B \\ \hline A \end{array} \qquad \begin{array}{l} A\&B \\ \hline B \end{array}$$

(Iv)
$$\begin{array}{l} A \\ \hline AvB \end{array} \qquad \begin{array}{l} B \\ \hline AvB \end{array}$$

(Ev)
$$\begin{array}{lll} AvB & & \\ A & & B \\ \ldots & & \ldots \\ C & & C \\ \hline C & & \end{array}$$

(I¬)
$$\begin{array}{l} A \\ \ldots \\ B\&\neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

(E¬)
$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ \hline A \end{array}$$

De aquí se llega finalmente a:

[10] Un argumento es derivable en DN, $X\vdash_{DN} A$, syss existe una derivación de A a partir de las fórmulas en X que hace uso exclusivamente de las reglas enumeradas en [9].

La teorematicidad es, como ya dijimos un caso límite:

[11] *A es un teorema del Cálculo de deducción natural*, $|_{DN}$ A en símbolos, syss $\iota|_{DN}$ A es derivable en DN.

El Cálculo de Deducción natural fue desarrollado por Quine, Fitch y otros a partir de una sugerencia de Russell. El calificativo que le acompaña, “natural”, indica el intento de aproximarse al modo en que realmente opera nuestra mente cuando se trata de obtener conclusiones a partir de premisas. ¿Podemos considerar realmente este sistema deductivo como una descripción de las capacidades formales básicas de nuestra mente? Parece dudoso que así sea.

III. Tablas analíticas. En esta ocasión el móvil consiste en resolver toda la información presente en las premisas para determinar si ésta contiene o no la información vertida en la conclusión. Para ello se intenta hallar alguna incompatibilidad entre el análisis de las premisas y el análisis de la *negación* de la conclusión. Esta circunstancia ha llevado en alguna ocasión a considerar al sistema de tablas analíticas como un mecanismo semántico y no como un genuino sistema deductivo. La organización del sistema de reglas que caracteriza este sistema ha contribuido igualmente a reforzar esa impresión. No obstante, lo habitual ahora es incluirlo entre los sistemas deductivos sin más.

Las reglas de un sistema de tablas son de dos tipos: *verdad* y *falsedad*. Estos nombres proceden de ciertas presentaciones en las que se anteponían a las fórmulas ciertos símbolos auxiliares denominados *etiquetas* y que servían para indicar si la fórmula a la que afectaban se encontraba afirmada o negada –bajo el alcance de un negador-. En la actualidad se respeta esa nomenclatura pero se interpreta, más bien, como un método de clasificar fórmulas y con ello, las reglas que cabe aplicar sobre ellas.

[12] Cálculo de Tablas Analíticas. (TA)

(V&) $$\dfrac{A\&B}{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}$$

(F&) $$\dfrac{\neg(A\&B)}{\neg A \qquad \neg B}$$

(V v) $$\dfrac{AvB}{A \quad B}$$

(Fv) $$\dfrac{\neg(AvB)}{\begin{array}{c}\neg A\\ \neg B\end{array}}$$

(V→) $$\dfrac{A\rightarrow B}{\neg A \quad B}$$

(F→) $$\dfrac{\neg(A\rightarrow B)}{\begin{array}{c}A\\ \neg B\end{array}}$$

(F¬) $$\dfrac{\neg(\neg A)}{A}$$

Las convenciones extra son en este caso muy simples. Obsérvese que las fórmulas que figuran a continuación de la cabecera de cada regla pueden aparecer una debajo de otra, o emparejadas, una a la derecha de la otra. Esto tiene el efecto, como se aprecia en los ejemplos del apéndice, de indicar si la prolongación de la tabla mediante la adición las fórmulas correspondientes ha de hacerse dentro de la misma *rama* o mediante la apertura de dos ramas incluyendo para ello un *punto de bifurcación.*

[13] Una *tabla analítica* consiste en una colección de fórmulas ubicadas en puntos o nodos los cuales forman a su vez ramas y en la que las fórmulas que originan esos nodos son obtenidas por el solo uso de reglas en [95].

Derivabilidad formal

No toda tabla tiene un significado lógico relevante. Sólo aquellas cuya *cabecera* está formada por las premisas y la negación de la conclusión ubicadas todas ellas en una única rama son útiles para evaluar argumentos. La noción de rama es suficientemente clara como para que no sea preciso aportar una definición formal rigurosa. Como en tantas otras representaciones, una rama no es sino una trayectoria tendida entre puntos o nodos que es posible realizar sin levantar el lápiz del papel.

[14] i. Dada una tabla T, decimos que una fórmula en T está *usada* syss ha sido objeto de la aplicación de alguna regla en [12].

ii. Una tabla es *terminada s*i todas las fórmulas que la integran han sido usadas, o bien son fórmulas atómicas sobre las cuales no cabe ya emplear regla alguna.

iii. Una rama en una tabla está *cerrada* syss contiene una fórmula y su negación.

iv. Una tabla es *cerrada* syss todas sus ramas lo son.

Haciendo uso de [14] decimos que:

[15] Un argumento es *derivable en Tablas Analíticas*, $X|_{TA}$ A, en símbolos, syss la tabla cuya cabecera está formada por las premisas y la negación de la conclusión *puede* ser extendida hasta formar una tabla cerrada.

La idea general que subyace al método expuesto es la de juzgar si la información expresada por la conclusión, evaluada a través de la distribución de sus subfórmulas, se encuentra o no presente en las premisas. Si es así, la adición de la negación de la conclusión generará ramas siempre incompatibles con las premisas, en caso contrario, habrá alguna rama cuyas fórmulas puedan ser consideradas de manera conjunta, dando así a entender que las premisas y la negación de la conclusión son mutuamente consistentes. Más adelante habremos de ver las posibilidades de este procedimiento en la investigación de las propiedades generales de una lógica.

El procedimiento de Tablas Analíticas acude, como se ha visto, a reglas cuya cabecera contiene fórmulas de mayor grado lógico que aquella, o aquellas, que figuran en la conclusión. Esto hace que la tabla llegue, finalmente, a fórmulas atómicas sobre las que no cabe aplicar nuevas reglas, alcanzándose así un punto que permite hablar de tablas terminadas. Puesto que el número de ramas es siempre finito –si las premisas lo son- y el criterio para establecer si una rama es cerrada es siempre efectivo, cabe pensar en emplear este sistema como un procedimiento de *decisión* aplicable de forma general. Convendrá que recordemos esta observación más adelante, cuando llegue el momento de analizar el control que poseemos sobre este tipo de sistemas. Sea como fuere, este rasgo no está asociado de forma necesaria al concepto de derivabilidad formal. El sentido en que decimos que la noción de derivabilidad formal es constructiva no exige que seamos capaces de determinar para cada posible argumento si una construcción tal existe o no. Que en el caso de las Tablas Analíticas seamos capaces de resolver afirmativamente este tipo de cuestiones es el resultado de ciertas propiedades generales del tipo de análisis lógico que nos traemos entre manos. Volveré a este delicado asunto más adelante.

Sólo queda aclarar que la teorematicidad se analiza en este caso a partir de la definición de tablas cuya cabecera consta exclusivamente de la negación de la conclusión, procediendo en todo lo demás como en el caso en que se cuenta con un conjunto no vacío de premisas.

IV. <u>Cálculo de Secuentes</u>. El método de Tablas analíticas saca provecho de una idea muy simple: si una fórmula puede ser obtenida como conclusión a partir de un conjunto de premisas ello se debe a que la información que ésta codifica está ya presente de algún modo en las premisas. El Cálculo de Secuentes ideado por el matemático alemán Gerhart Gentzen en 1934 puede ser visto como un desarrollo sistemático y exhaustivo de una idea muy similar. ¿Cuál es la inferencia más simple que cabe concebir en la cual la información expresada en la conclusión está ostensiblemente presente en aquella que se codifica en las premisas? La respuesta que encuentra Gentzen no puede ser más obvia: $X,A \vdash A$, donde X es un conjunto de fórmulas posiblemente vacío. Cualquier argumento correcto puede ser considerado, entonces, como una estructura obtenida mediante sucesivas complicaciones de este esquema básico. Todo lo que hace falta es describir adecuadamente las reglas que cabe emplear para añadir complejidad lógica tanto en la conclusión como en las premisas. El criterio según el cual se organizan estas reglas es evidente: cada conectiva quedará perfectamente caracterizada por dos reglas, una que muestra cómo se introduce en fórmulas que constan como premisas –a la izquierda del símbolo de aserción- y otra que hace lo propio con fórmulas que figuran en la parte correspondiente a la conclusión –a la derecha del símbolo de aserción-. A éstas se suele añadir una colección de reglas ajenas a la conducta de las conectivas destinadas a expresar aspectos generales de la consecuencia, algo que en ocasiones se denomina el contexto de la derivación. Si el sistema es suficientemente simple, algunas de estas reglas pueden eliminarse, pero no antes de demostrar que tal cosa es posible.

[16] Cálculo de Secuentes. (Sq)

Ax.: $X,A \Rightarrow A,Y$

Reglas estructurales:

Monotonía: $\dfrac{X\Rightarrow Y}{X,A\Rightarrow Y}$ $\qquad$ $\dfrac{X\Rightarrow Y}{X\Rightarrow Y,A}$

Contracción: $\dfrac{X \Rightarrow Y, A, A}{X \Rightarrow Y}$ $\qquad$ $\dfrac{X, A, A \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y}$

Permutación: $\dfrac{X \Rightarrow Y, A, B}{X \Rightarrow Y, B, A}$ $\qquad$ $\dfrac{X, A, B \Rightarrow Y}{X, B, A \Rightarrow Y}$

Corte: $\dfrac{X \Rightarrow Y, A \qquad W, A \Rightarrow Z}{W, X \Rightarrow Y, Z}$

Reglas lógicas:

I& $\dfrac{X, A, B \Rightarrow Y}{X, A\&B \Rightarrow Y}$ $\qquad$ D& $\dfrac{X \Rightarrow Y, A \qquad X \Rightarrow Y, B}{X \Rightarrow Y, A\&B}$

Iv $\dfrac{X, A \Rightarrow Y \qquad X, B \Rightarrow Y}{X, AvB \Rightarrow Y}$ $\qquad$ Dv $\dfrac{X \Rightarrow Y, A, B}{X \Rightarrow Y, AvB}$

I→ $\dfrac{X \Rightarrow Y, A \qquad X, B \Rightarrow Y}{X, A \rightarrow B \Rightarrow Y}$ $\qquad$ D→ $\dfrac{X, A \Rightarrow B, Y}{X \Rightarrow A \rightarrow B, Y}$

I¬ $\dfrac{X \Rightarrow Y, A}{X, \neg A \Rightarrow Y}$ $\qquad$ D¬ $\dfrac{X \Rightarrow A, Y}{X, \neg A \Rightarrow Y}$

Estas combinaciones de conjuntos de fórmulas que hemos simbolizado mediante X⇒Y reciben el nombre de *secuentes*. Un secuente puede ser interpretado como una especie de correlato de un argumento, siendo "⇒" lo que hace las veces del símbolo de aserción representado normalmente por "|". Es habitual interpretar las expresiones en X como una cadena de fórmulas unidas entre sí de forma conjuntiva, mientras que en Y figurarían unidas disyuntivamente, no obstante, nada de esto es preciso para utilizar correctamente un cálculo secuencial. Una derivación en Sq empieza introduciendo tantas instancias del axioma como se precise para ir haciendo uso a continuación de las reglas enumeradas en [16]. Éstas se dividen, como se puede ver, en dos clases: las estructurales y las lógicas. No es casualidad que las reglas estructurales recuerden en algo a las propiedades abstractas de la consecuencia estudiadas en secciones anteriores. Si incluimos el axioma, esquema que puede ser considerado como una regla cuya cabecera es vacía, podemos ver cómo se incorpora de forma inmediata la reflexividad, gracias al axioma, la monotonía, por la regla de monotonía, y la transitividad, expresada en la regla de corte. Las reglas de contracción y permutación expresan convenciones acerca del modo en que interpretamos la presencia de una fórmula en un secuente: dos ocurrencias de la misma fórmula no añaden nada, y el orden de ocurrencia es prescindible. Estas decisiones parecen obvias en el actual contexto, pero conviene avisar de la existencia de sistemas en los que la cosas se plantean de otro modo. En la presentación ofrecida aquí todas estas reglas son prescindibles bajo ciertas condiciones muy generales. La monotonía puede no incluirse de forma explícita gracias a que el axioma ya hace uso de ella al admitir conjuntos tanto a la izquierda como a la derecha del símbolo de secuente. Caso de haber elegido $A \Rightarrow A$ como axioma, la monotonía sería precisa. La eliminabilidad de la regla de corte es asunto muy distinto.

Una vez definido el cálculo, la derivabilidad queda como sigue:

[17] Un argumento en *derivable en el Cálculo de Secuentes* -$X \vdash_{Sq} A$, en símbolos- syss el secuente $X \Rightarrow A$ es derivable en Sq.

Un sistema en el que la regla de corte sea eliminable tiene una característica que merece la pena comentar. Que un sistema sea capaz de prescindir de esta regla supone que todo secuente obtenible mediante una derivación en la que se haga uso de ella puede obtenerse, igualmente, mediante una derivación en la que no se haga uso de la regla de corte. Esto fue establecido por vez primera por el propio Gentzen en un celebrado teorema conocido como la *Hauptsatz* –Proposición Fundamental-. Si nos fijamos bien, la regla de corte es la única en la que hay más fórmulas explícitamente mencionadas en su cabecera que en su conclusión: incumple lo que denomina la propiedad de la subfórmula. Si se prescinde del uso de esta regla, toda derivación resulta reversible: se puede emprender desde los axiomas hasta el secuente considerado como conclusión, pero también desde la supuesta conclusión hasta ver si finamente se alcanzan las debidas instancias del axioma. Esto permite hacer operar al cálculo de secuentes como un sistema muy similar al de las tablas analíticas, permitiendo entonces que la derivabilidad quede asociada a un procedimiento de decisión. Un sistema para el que se pruebe la eliminabilidad de la regla de corte puede quedar perfectamente caracterizado por sus constantes lógicas, no existiendo ningún rasgo esencial en su descripción de la consecuencia no imputable a la conducta de sus constantes. La demostración de teoremas en Sq consiste, simplemente, en la derivación de secuentes del tipo $\iota \Rightarrow A$.

Orientación bibliográfica.

Este capítulo hace un recorrido por los distintos tipos de cálculos que no suele aparecer como tal en las obras más comunes, por lo que será preciso recurrir a varias de ellas.

El planteamiento general y un recorrido por todos estos sistemas se encuentran en **[Sundholm, 1983]**. La clasificación de los distintos sistemas deductivos ha sido tomada de ahí. La orientación general de esta sesión es muy similar a la de este texto. También conviene leer **[Marraud, 1998]**, cap.2. Es extraordinariamente breve, apenas dos páginas, pero es muy claro. La exposición de los sistemas tipo Gentzen sigue la línea adoptada en **[Marraud y Navarro, 1988]**.

Para la descripción de los distintos sistemas axiomáticos se puede acudir a **[Garrido, 1974]**, cap. XIV, a **[Bell y Machover, 1977]**, cap. 3, o a **[Hunter, 1969]**, Tercera parte, secc.41. No se trata de aprender a manejar sistemas axiomáticos, sino tan sólo a saber cómo están construidos. Eso es más que suficiente.

En esta ocasión **[Badesa, Jané y Jansana, 1998]** no es una buena referencia. La notación es muy distinta a la que se ha popularizado en la mayoría de los manuales en castellano y su uso puede ser muy confundente.

[Quesada, 1985] cap. 2.4 contiene una exposición correcta del Cálculo de Tablas Analíticas. También lo hace **[Nepomuceno, 1995]**, pero como si se tratara de un procedimiento semántico, lo que a mi juicio no es correcto. Sin embargo, hace una presentación, alternativa, pero interesante de un Cálculo de Deducción Natural.

La exposición más divulgada del Cálculo de Deducción Natural es, seguramente, la de **[Garrido, 1974]**, cap. 5. No obstante, insiste de forma innecesaria en lo que denomina *reglas derivadas*, que, en realidad, carecen de cualquier justificación general que las haga relevantes en algún sentido. Su exposición de las Tablas Analíticas también las contempla como un mecanismo semántico.

En el capítulo III de **[Falguera y Martínez Vidal, 1999]** se hace una presentación sumamente detallada del Cálculo de Deducción Natural. Contiene muchos ejercicios resueltos y propone muchos otros cuya solución aparece en un volúmen aparte. Ofrece una buena exposición de la estrategia general para resolver ejercicios en DN, p. 88 y ss., lo cual es de agradecer. Discute y demuestra un gran número de reglas derivadas.